Ecriture et résolution du modèle canonique des cycles réels

X.Fairise, J.O.Hairault, F.Langot et F.Portier *

Janvier 1992

Résumé

Nous proposons dans cet article un examen méthodologique de l'écriture, de la résolution et de la validation par simulation stochastique du modèle canonique des cycles réels. Nous examinons les conditions nécessaires à l'existence d'un sentier de croissance équilibrée dans le modèle de croissance néoclassique et proposons un rappel théorique de la notion d'"élasticité intertemporelle de substitution". Dans un second temps, nous résolvons une version linéarisée du modèle en considérant explicitement la présence d'anticipations rationnelles et en précisant les liens entre le modèle initial et sa version linéaire. Enfin, nous décrivons le calcul des propriétés cycliques du modèle et les méthodes de validation utilisées par le courant des cycles réels.

Abstract

We propose in this paper a methodological analysis of the writing, resolution and stochastic simulation of the canonical Real Business Cycle model. We first study the necessary conditions for the existence of a steady state in the standard neoclassical growth model and recall the definition of the "intertemporal elasticities of substitution". Then, we solve a linearized version of the model with the explicit presence of rational expectations, describe the links between the non-linear and linear versions of the model and show how to compute its cyclical properties.

*CME MAD Paris I, CEBI MAD Paris I et Paris IX, MAD Paris I, CREST-ENSAE et MAD Paris I.

Summary

The Real Business Cycle litterature proposed in the eighties the neoclassical growth model as a benchmark framework to study the business cycle. Technological shocks are supposed to be sufficient in such a model to mimic the most important features of the cycle. Economic fluctuations are then seen as optimal reponses to exogeneous shocks : the equilibrium-optimum equivalence is true and fluctuations are optimal.

Besides its theoretical aspect, the *RBC* theorists proposed some particular techniques of stochastic simulations and validation of their model. These validation and resolution techniques of an intertemporal general equilibrium model present a general interest, which is independant of the interest one could have for the *RBC* litterature. We propose in this paper a methodological analysis of the writing, resolution and stochastic simulation of the canonical Real Business Cycle model. This paper precises the results of King, Plosser and Rebelo [1987].

We first write the problem in a recursive form wich allows us to derive properly its Euler equation with the explicit presence of rational expectations. We do not invoke that the *certainty equivalence* property is verified (as in King, Plosser and Rebelo [1987]) and we take into account the rational expectation of the co-state variable associated to the capital stock. We then study the necessary conditions for the existence of a steady state in the standard neoclassical growth model, and exhibit the restrictions on technology and preferences one needs to impose. We also precise on a theoretical ground the definition of the "intertemporal elasticities of substitution", as the choice of their levels is crucial in the calibration of the model. These elasticities are computed from the *frischian* demand functions of the household.

Secondly, we linearize the Euler equations around the steady state equilibrium and solve this linear version of the problem. We explicitely include the presence of rational expectations to derive the solution of the model (the resolution is done following Blanchard and Khan [1980]), and describe the links between the two versions of it (non-linear and linear). In particular, we show that the computation of the forward state variable in the linear model is possible when the transversality condition of the non-linear model is verified. We also demonstrate the existence of a saddle path solution of the (Hansen 1985) model with labour supply, indivisiblity and lottery.

Then, we show how to compute its cyclical properties : impulse response functions to a technological shock and population moments of the model. We also recall how simulated and observed data can be filtered with Hoddrick-Prescott filter to evaluate the ability of the model in reproducing some stylized facts at the business cycle frequency, as it is done in the *RBC* litterature.

Introduction

Le courant des cycles réels (pour *Real Business Cycles*) a tenté d'imposer dans les années quatre-vingt le modèle néoclassique de croissance comme cadre de référence de l'analyse du cycle économique [1]. Ce modèle perturbé uniquement par des chocs sur la productivité globale des facteurs, interprétés naturellement dans ce cadre comme des chocs technologiques, permettrait en effet de rendre de compte de l'essentiel des fluctuations économiques. Ces dernières résultent alors des réponses optimales des agents économiques à ces chocs. Dans ce cadre théorique, l'équivalence équilibre-optimum est vérifiée et toute tentative de régulation de l'activité économique est donc sous-optimale.

Le courant des cycles réels s'oppose ainsi à la vision traditionnelle des fluctuations économiques comme phénomène résultant d'imperfections informationnelles ou de marchés [2] et dont les sources devaient être recherchées parmi les chocs de demande, monétaires ou budgétaires.

Sur cette rupture de nature théorique, qui constitue selon (Hénin 1989) un véritable "*renversement de perspective*" dans l'analyse du cyle, est venu se greffer une technique particulière de résolution et de validation. Comme la résolution analytique du modèle est impossible, des méthodes de résolution approchée sont utilisées, méthodes dont le point commum est de respecter la propriété d'équivalent-certain. En outre, le modèle théorique fait l'objet de simulations stochastiques, sur la base d'un étalonnage des paramètres libres caractérisant les préférences et la fonction de production du modèle. Ces simulations permettent d'obtenir une batterie de moments d'ordre deux relatifs aux séries générées par le modèle, moments qui sont comparés à ceux calculés sur séries observées.

Le courant des cycles réels propose donc une vision des fluctuations économiques en rupture avec les analyses traditionnelles et fait appel à des méthodes de résolution et de validation qui lui sont propres. Le modèle de croissance néoclasique constitue l'ossature commune de cette littérature et l'ensemble des mécanismes essentiels y sont présents. C'est la résolution complète de ce modèle qui est proposée dans cet article. Il précise ainsi la méthode exposée par (King, Plosser et Rebelo 1987).

La première partie concerne principalement sa dimension de long terme. Après une rapide présentation du modèle, nous en dérivons les conditions d'optimalité et mettons en évidence les restrictions qu'il faut imposer sur la technologie et sur

1. Il est important de noter d'ores et déjà qu'il ne s'agit pas ici de cycles déterministes mais des mouvements récurrents de périodicité et d'amplitude variables que connait l'activité économique. On associe ainsi cycles et fluctuations économiques dans cette littérature.

2. On peut à cet égard identifier au moins un apport important du courant RBC, celui de proposer une explication du cycle économique dans un cadre purement walrasien. Il constitue alors une référence lorsque l'on évalue l'apport intrinsèque d'imperfections.

les préférences pour que le modèle admette un sentier de croissance équilibrée. Un troisième point a trait au calcul et à l'interprétation des élasticités de substitution intertemporelle, élasticités qui sont une des bases du comportement cyclique du modèle.

La deuxième partie s'intéresse à la dimension cyclique du modèle, obtenue comme déviation par rapport au sentier stationnaire de croissance de l'économie. Dans un premier temps, nous présentons la méthode de résolution approchée qui permet de déterminer les règles de décision caractérisant les réponses optimales aux chocs technologiques. Nous optons pour une méthode consistant à linéariser les conditions d'Euler après avoir brièvement rappelé l'existence de méthodes alternatives. Nous montrons que l'on retrouve alors la méthode de résolution d'un modèle stationnaire sous anticipations rationnelles analogue à celui présenté par (Blanchard et Kahn 1980). S'il existe une trajectoire selle, nous montrons que la condition de transversalité du modèle non linéaire assure la convergence du modèle linéaire. La résolution que nous utilisons prend explicitement en compte la présence d'anticipations rationnelles et montre ainsi que la propriété d'*équivalent-certain* invoquée par (King et al. 1987) [3] est vérifiée dans le modèle. Nous démontrons également l'existence d'une trajectoire selle solution dans le cadre du modèle de (Hansen 1985) avec offre de travail, indivisibilité et loterie.

Dans la mesure où nous aboutissons à une solution sous forme Etat-Mesure du modèle, il est alors facile de calculer les fonctions de réponse et les moments théoriques ou simulés [4] des différentes variables de mesure pour un étalonnage donné des paramètres libres du modèle, en particulier du processus suivi par le choc technologique [5].

1 Présentation et résolution du modèle de croissance néoclassique

Nous exposons brièvement le modèle standard de croissance néoclassique avant d'en dériver les conditions d'optimalité. Nous examinons alors les restrictions sur la technologie et les préférences nécessaires à l'existence d'un sentier de croissance équilibrée. Enfin, nous précisons la définition et le calcul des élasticités intertemporelles de substitution.

3. Ces auteurs résolvent le modèle en prévisions parfaites.

4. Nous discutons la nécessité de considérer les moments de séries filtrées de façon à éliminer les basses fréquences qui caractérisent les mouvements de périodicités supérieures au cycle économique.

5. En pratique, dans ce cadre de concurrence parfaite et à rendements constants, on l'identifie au processus du résidu Solow.

1.1 Exposé du modèle

On considère une économie concurrentielle composée d'un grand nombre de ménages et de firmes [6]. Les préférences du ménage représentatif sont décrites par la fonction d'utilité :

$$u = u(C_t, L_t)$$

C_t représente la consommation et L_t le loisir du ménage à la date t. Cette fonction satisfait les hypothèses (H_1) :

(H_1) : *La fonction d'utilité u est une fonction bornée, deux fois continûment différentiable, strictement concave, strictement croissante et satisfaisant les conditions d'Inada.*

A chaque période, le ménage est confronté à deux types de contraintes : la première concerne l'allocation du temps total dont il dispose (normalisé à 1), entre loisir et travail et la seconde traduit le partage du produit entre l'investissement et la consommation.

$$L_t + N_t \leq 1$$

$$C_t + I_t \leq Y_t$$

En outre, il accumule du capital qu'il loue à l'entreprise représentative [7]. Le stock de capital évolue de la façon suivante :

$$K_{t+1} = (1 - \delta)K_t + I_t$$

où I_t représente l'investissement brut et δ le taux de dépréciation du capital à chaque période.

A chaque période, l'entreprise représentative assure la production du bien unique de l'économie, en quantité Y_t, et suivant une technologie décrite par la fonction de production F vérifiant les hypothèses (H_2) :

(H_2) : *la fonction de production F est une fonction deux fois continûment différentiable, strictement croissante, homogène de degré un (à rendements constants), strictement quasi-concave et satisfaisant les conditions d'Inada.*

$$Y_t = A_t F\left(X_{K,t}K_t, X_{N,t}N_t\right)$$

où K_t représente le stock de capital déterminé à la date $t-1$ et N_t la quantité de travail nécessaire à la date t. A_t représente un choc aléatoire de productivité

6. Par la suite, nous normalisons à un le nombre de firmes et de ménages.

7. Une telle hypothèse permet de simplifier l'analyse en évitant une prise en compte explicite du marché des titres.

globale des facteurs, X_K et X_N le progrès technique déterministe incorporé au capital et au travail. Ces deux variables croissent aux taux constants respectifs γ_{XK} et γ_{XN}. La productivité globale des facteurs A_t est supposée suivre un processus stochastique stationnaire [8]. Dans la seconde partie de l'étude, nous nous placerons dans le cas particulier généralement considéré dans la littérature *RBC* : la productivité globale des facteurs A_t, exprimé en logarithme, sera supposée suivre un processus autorégressif d'ordre un stationnaire :

$$\log(A_t) = \rho \log(A_{t-1}) - (1-\rho)\log(A) + \epsilon_t$$

où $\log(A)$ est la moyenne du processus, $|\rho| < 1$ et ϵ_t l'innovation de variance σ_ϵ^2.

En présence de marchés complets, les deux théorèmes de l'économie du Bien-Etre sont vérifiés dans cette économie et il existe toujours un vecteur de prix décentralisant l'optimum obtenu en résolvant le programme du planificateur. Ce programme s'écrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \max_{C_t, L_t} \quad & E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(C_t, L_t) \\ \text{s.c.} \quad & \begin{cases} C_t + I_t \leq A_t F(X_{K,t}K_t, X_{N,t}N_t) \\ I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \end{cases} \end{aligned}$$

β représente le taux d'escompte psychologique, E_0 l'espérance mathématique conditionnelle à l'information disponible à la date 0. Cette information est donnée par K_0 et le vecteur $\chi_0 = (A_0, X_{K,0}, X_{N,0})$. A la période t, les variables d'état sont K_t et χ_t et les variables de contrôles sont C_t et N_t.

1.2 Ecriture des conditions d'Euler

Notre objectif est de résoudre ce problème pour obtenir des règles de décisions stationnaires. Dans ce but, nous résolvons le problème en boucle fermée en l'écrivant sous une forme récursive. Comme le démontrent (Stokey et Lucas 1989) (théorèmes), le problème admet une représentation sous forme d'équation fonctionnelle et sa solution optimale vérifie l'équation de Bellman :

$$\begin{aligned} V(K_t, \chi_t) &= \max_{C_t, N_t} \{u(C_t, 1-N_t) + \beta E_t [V(K_{t+1}, \chi_{t+1})]\} \\ \text{s.c.} \quad & K_{t+1} = (1-\delta)K_t + A_t F(X_{K,t}K_t, X_{N,t}N_t) - C_t \end{aligned}$$

8. Dans le cadre de cette économie à rendements constants et de concurrence parfaite, la productivité globale des facteurs correspond à l'intégrale du résidu de (Solow 1957).

Les conditions d'Euler du problème sont données par les deux conditions du premier ordre, la condition de l'enveloppe et l'équation d'évolution du capital. On y adjoint la condition de transversalité pour obtenir les conditions d'optimalité du problème :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial C_t} + \beta E_t \left[\frac{\partial V(K_{t+1}, \chi_{t+1})}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial C_t} \right] &= 0 \\
\frac{\partial u}{\partial N_t} + \beta E_t \left[\frac{\partial V(K_{t+1}, \chi_{t+1})}{\partial K_{t+1}} \frac{\partial K_{t+1}}{\partial N_t} \right] &= 0 \\
\frac{\partial V(K_t, \chi_t)}{\partial K_t} - \beta \left[\left(1 - \delta + \frac{\partial F_t \left(X_{K,t} K_t, X_{N,t} N_t \right)}{\partial K_t} \right) E_t \left(\frac{\partial V(K_{t+1}, \chi_{t+1})}{\partial K_{t+1}} \right) \right] &= 0 \\
K_{t+1} - (1 - \delta) K_t - A_t F(X_{K,t} K_t, X_{N,t} N_t) + C_t &= 0 \\
\lim_{t \to \infty} E_0 \left(\beta^t \frac{\partial V(K_t, \chi_t)}{\partial K_t} K_t \right) &= 0
\end{aligned}$$

Avec la notation :

$$\Lambda_t = \left(\frac{\partial V(K_t, \chi_t)}{\partial K_t} \right)$$

les conditions d'Euler se réécrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} - \beta E_t \left[\Lambda_{t+1} \right] = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial N_t} - \beta E_t \left[\Lambda_{t+1} \right] \frac{A_t \partial F \left(X_{K,t} K_t, X_{N,t} N_t \right)}{\partial N_t} = 0 \tag{2}$$

$$\Lambda_t - \left(1 - \delta + \frac{A_t \partial F(X_{K,t} K_t, X_{N,t} N_t)}{\partial K_t} \right) \beta E_t \left[\Lambda_{t+1} \right] = 0 \tag{3}$$

$$K_{t+1} - (1 - \delta) K_t - A_t F \left(X_{K,t} K_t, X_{N,t} N_t \right) + C_t = 0 \tag{4}$$

$$\lim_{t \to \infty} E_0 (\beta^t \Lambda_t K_t) = 0 \tag{5}$$

Nous prenons ici une définition de Λ qui nous semble économiquement plus pertinente que celle proposée par (King et al. 1987). Λ_t représente la valeur marginale d'une unité de capital supplémentaire à la période t. Les décisions de consommation, d'offre de travail et d'investissement déterminent le niveau du capital à la période suivante et sont donc conditionnelles à $E \left[\Lambda_{t+1} \right]$, l'espérance de sa valeur marginale en t.

Les deux premières équations déterminent la consommation et l'offre de travail de la période. La troisième caractérise la trajectoire optimale du stock de capital. Sachant que le taux d'intérêt r_{t+1} est égal à la productivité marginale du capital nette de la dépréciation, la condition de l'enveloppe se réécrit :

$$1 + r_{t+1} = \frac{1}{\beta} \frac{\Lambda_t}{E_t \left[\Lambda_{t+1}\right]} \tag{6}$$

Enfin, la condition de transversalité signifie qu'à l'infini, la valeur actualisée du capital en termes d'utilité marginale de la consommation est nulle. On retrouve cette interprétation [9] en reprenant les équations (1) et (5) qui donnent la condition sur le stock de capital optimal énoncée par (Weitzman 1973) :

$$\lim_{t \to \infty} E_0(\beta^t \frac{\partial u}{\partial C_t} K_t) = 0$$

On obtient également en écrivant la contrainte budgétaire intertemporelle du ménage une condition de non-endettement à l'infini à partir de cette condition de transversalité [10].

1.3 Restrictions assurant l'existence d'un sentier de croissance équilibrée

Nous proposons dans cette section un examen des restrictions à imposer sur la technologie et les préférences pour que l'économie admette un sentier de croissance équilibrée où l'ensemble des variables, C_t, I_t, Y_t et K_t croissent à un unique taux γ constant. Nous montrons que ce taux de croissance est le taux de croissance du progrès technique augmentant le travail, seul type de progrès technique compatible avec une croissance équilibrée. Dans ce modèle, la croissance n'est due ni à des facteurs démographiques (la population est constante), ni à un processus endogène d'accumulation des connaissances. La dimension stochastique du modèle étant stationnaire, son comportement de long terme est donné par sa composante déterministe. Dans la suite de cette section, nous poserons donc que $A_t = A, \forall\, t$.

1.3.1 Restrictions sur la technologie

Nous déterminons les formes de progrès technique compatibles avec un sentier de croissance équilibrée. Nous montrons dans un premier temps que toutes les variables croissent au même taux sur le sentier de croissance équilibrée.

Proposition 1 *: Sur le sentier de croissance équilibrée, les variables C, K, I, Y croissent au même taux.*

9. Pour plus de précisions, voir (Michel 1990) dans un cadre déterministe.
10. Voir (d'Autume et Michel 1985) pour une démonstration dans un cadre déterministe.

Démonstration : On suppose que chaque variable croît à taux constant et l'on note γ_W le taux de croissance d'une variable W quelconque.

L'équation d'évolution du capital donne la relation :

$$\gamma_K = (1-\delta) + \left[\frac{Y_t}{K_t} - \frac{C_t}{K_t}\right]$$

Sous l'hypothèse de croissance à taux constant de Y, K et X_K, cette équation implique que $(Y-C)$ croisse au taux γ_K. Nous avons alors :

$$Y_t - C_t = (Y_0 - C_0)\gamma_K^t$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_0\gamma_Y^t \\ C_t &= C_0\gamma_C^t \end{aligned}$$

d'où l'équation :

$$(Y_0 - C_0)\gamma_K^t = Y_0\gamma_Y^t - C_0\gamma_C^t$$

soit en regroupant les termes :

$$Y_0\left(\gamma_Y^t - \gamma_K^t\right) = C_0\left(\gamma_C^t - \gamma_K^t\right)$$

Cette relation doit être vraie pour tout couple (Y_0, C_0), d'où l'égalité :

$$\gamma_Y = \gamma_K = \gamma_C$$

En outre, comme $I_t = Y_t - C_t$ et que Y_t et C_t croissent au même taux, l'investissment croît également au même taux, ce qui achève la démonstration. □

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition 2 :

Proposition 2 *: Le progrès technique augmentant le travail X_N (neutre au sens de Harrod) est l'unique forme de progrès technique compatible avec un sentier de croissance équilibrée.*

Démonstration : Le taux de croissance du produit est défini par :

$$\gamma_Y = \frac{Y_{t+1}}{Y_t} = \frac{F(X_{Kt+1}K_{t+1}, X_{Nt+1}N_{t+1})}{F(X_{Kt}K_t, X_{Nt}N_t)}$$

Sachant que la population est constante, – *i.e.* $N_t = N\ \forall t$ – il vient :

$$\gamma_Y = \frac{X_{Kt+1}K_{t+1}}{X_{Kt}K_t}\frac{F(1, Z_{t+1})}{F(1, Z_t)}$$

où

$$Z_t = \frac{X_{Nt} N}{X_{Kt} K_t} \tag{7}$$

et finalement :

$$\gamma_Y = \gamma_K \gamma_{XK} \frac{F(1, Z_{t+1})}{F(1, Z_t)} \tag{8}$$

soit sachant que $\gamma_Y = \gamma_K$:

$$\frac{F(1, Z_{t+1})}{F(1, Z_t)} = \frac{1}{\gamma_{XK}} \tag{9}$$

Nous montrons dans un premier temps que seule une fonction de production Cobb-Douglas assure l'existence d'un sentier de croissance équilibrée si $\gamma_{XK} \neq 1$. Dans ce cas, on peut réexprimer le progrès technique comme portant uniquement sur le travail. Dans un second temps, nous montrons que toutes les fonctions de production homogènes de degré 1 sont admissibles lorsque $\gamma_{XK} = 1$.

Cas $\gamma_{XK} \neq 1$: Nous avons par définition de Z :

$$Z_{t+1} = \frac{\gamma_{XN}}{\gamma_K \gamma_{XK}} Z_t$$

et l'équation (9) se réécrit :

$$F\left(1, \frac{\gamma_{XN}}{\gamma_K \gamma_{XK}} Z_t\right) = \gamma_{XK}^{-1} F\left(1, Z_t\right)$$

En prenant la différentielle totale de cette équation, nous obtenons :

$$\frac{\gamma_{XN}}{\gamma_K \gamma_{XK}} D_2 F\left(1, \frac{\gamma_{XN}}{\gamma_K \gamma_{XK}} Z_t\right) = \gamma_{XK}^{-1} F\left(1, Z_t\right)$$

soit en notant $F(1, Z_t) = f(Z_t)$:

$$Z_{t+1} \frac{f'(Z_{t+1})}{f(Z_{t+1})} = Z_t \frac{f'(Z_t)}{f(Z_t)}$$

Cette équation nous indique que l'élasticité de f est constante. On peut alors intégrer cette élasticité pour obtenir :

$$\log\left(f(Z_t)\right) = b_1 \log\left(Z_t\right) + b_2$$

soit

$$f(Z_t) = b_3 Z_t^{b_4}$$

En reprenant la définition de f et celle de Z, nous obtenons :

$$F\left(X_{N,t}N_t, X_{K,t}K_t\right) = b_3\left(X_{N,t}N_t\right)^{1-b_4}\left(X_{K,t}K_t\right)^{b_4}$$

–*i.e.* une fonction de production Cobb-Douglas. Une telle fonction avec progrès technique affectant le travail et le capital peut alors se réécrire avec un progrès technique ne portant que sur le travail :

$$Y_t = b_3 K_t^{b_4}\left[\left(X_{Nt}X_{Kt}^{\frac{b_4}{1-b_4}}\right)N_t\right]^{1-A_4}$$

Le progrès technique retrouve ainsi sa neutralité au sens de Harrod et nous pouvons alors nous placer dans le cas $\gamma_{XK} = 1$ pour achever la démonstration de la proposition 2.

Cas $\gamma_{XK} = 1$: L'équation (9) donne :

$$\frac{F(1, Z_{t+1})}{F(1, Z_t)} = 1 \tag{10}$$

La fonction de production étant monotone dans ses deux arguments, la fonction f définie par $f(Z) = F(1, Z)$ est injective. Cette propriété d'injectivité assure que Z_t est constant si (10) est vérifiée. Ceci implique que $\gamma_{XN} = \gamma_K$, d'après l'équation de définition (7). En utilisant la proposition 1, il est alors immédiat d'obtenir :

$$\gamma_Y = \gamma_K = \gamma_C = \gamma_I = \gamma_{XN}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 2. □

1.3.2 Restrictions sur les préférences

Nous plaçons dans le cas $\gamma_{XK} = 1$ et montrons que seules les fonctions d'utilité compatibles avec un sentier de croissance équilibrée sont celles dont les élasticités de l'utilité marginale de la consommation et du loisir par rapport à la consommation sont indépendantes du niveau de la consommation. Ceci permet de dériver la forme générale de ces fonctions d'utilité.

Dans un premier temps, nous montrons que le rapport des utilités marginales de la consommation est constant dans le temps, et que le rapport des utilités marginales du loisir et de la consommation croît avec le progrès technique. Les conditions d'optimalité (1), (2) et (3) s'écrivent :

$$\frac{D_1u(C_t, L)}{D_1u(C_{t+1}, L)} = \frac{\Lambda_t}{\Lambda_{t+1}} = \beta[AD_1F(K_{t+1}, X_{Nt+1}N_{t+1}) + 1 - \delta] \tag{11}$$

et

$$\frac{D_2u(C_t,L)}{D_1u(C_t,L)} = X_{N,t}AD_2F(K_t, X_{N,t}N) \tag{12}$$

Comme la fonction F est homogène de degré 1, $D_1F(K_t, X_{N,t}N)$ et $D_2F(K_t, X_{N,t}N)$ sont homogènes de degré 0. Nous avons alors $D_1F(K_t, X_{N,t}N) = D_1F(\frac{K_t}{X_{N,t}}, N)$ et $D_2F(K_t, X_{N,t}N) = D_2F(\frac{K_t}{X_{N,t}}, N)$. Comme K_t et $X_{N,t}$ croissent au même taux, le rapport $\frac{K_t}{X_{N,t}} = k$ est constant au cours du temps. La productivité marginale du capital $D_1F(K_t, X_{N,t}N) = D_1F(k, N)$ et la productivité marginale du travail efficient $D_2F(K_t, X_{N,t}N) = D_2F(k, N)$ sont elles-mêmes indépendantes du temps.

Nous en déduisons que le rapport des utilités marginales de la consommation ne dépend pas du temps :

$$\frac{D_1u(C_t,L)}{D_1u(C_{t+1},L)} = \beta[D_1F(k,N) + 1 - \delta] \tag{13}$$

et que le rapport des utilité marginales du loisir et de la consommation croît au taux du progrès technique :

$$\frac{D_2u(C_t,L)}{D_1u(C_t,L)} = X_{N,t}AD_2F(k,N) \tag{14}$$

Sur le sentier de croissance, la consommation C_t est fonction du taux de croissance de l'économie γ_{XN} et de l'état initial $X_{N,0}$, qui est le facteur d'echelle.

Lemme 1 *: Les fonctions d'utilité compatibles avec un sentier de croissance équilibrée ont une élasticité de l'utilité marginale de la consommation indépendante de l'échelle de la consommation.*

Démonstration : Avec la contrainte budgétaire, nous déduisons l'expression suivante de C_t :

$$\begin{aligned} C_t &= AF(K_t, X_{N,t}N) - K_{t+1} + (1-\delta)K_t \\ &= X_{N,t}[AF(k,N) + (1-\delta-\gamma_{XN})k] \end{aligned}$$

$X_{N,0}$ étant la valeur initiale de $X_{N,t}$ et γ_{XN} le taux de croissance de $X_{N,t}$, nous avons $X_{N,t} = X_{N,0}\gamma_{XN}^t$. En substituant dans l'équation ci-dessus $X_{N,t}$ par son expression en fonction de $X_{N,0}$ et du taux de croissance γ_{XN}, nous obtenons :

$$C_t = X_{N,0}\gamma_{XN}^t[AF(k,N) + (1-\delta-\gamma_{XN})k] \tag{15}$$

La consommation C_t dépend d'un facteur d'échelle $X_{N,0}$ qui en détermine le niveau. Une variation de ce paramètre doit conserver les propriétés du sentier de croissance équilibrée, c'est à dire l'invariance du rapport des utilités marginales de la consommation. Nous déterminons les restrictions imposées aux préférences en différentiant les équations (13) et (14) par rapport à $X_{N,0}$.

En différentiant l'équation (13), nous obtenons :

$$\frac{D_{11}u(C_t,L)}{D_1u(C_t,L)}\frac{dC_t}{dX_{N,0}} = \frac{D_{11}u(C_{t+1},L)}{D_1u(C_{t+1},L)}\frac{dC_{t+1}}{dX_{N,0}}$$

De l'équation (15), on déduit facilement que $dC_t = \frac{dX_{N,0}}{X_{N,0}}C_t$. En substituant dans l'équation précédente, nous obtenons finalement :

$$\frac{D_{11}u(C_t,L)}{D_1u(C_t,L)}C_t = \frac{D_{11}u(C_{t+1},L)}{D_1u(C_{t+1},L)}C_{t+1} = -\sigma(L)$$

L'élasticité de l'utilité marginale de la consommation par rapport à la consommation $\sigma(L)$ doit être indépendante de l'échelle de la consommation. En revanche, rien ne permet d'affirmer à ce stade que cette élasticité est indépendante du loisir comme le font (King et al. 1987). □

Lemme 2 *: Les fonctions d'utilité compatibles avec un sentier de croissance équilibrée ont une élasticité de l'utilité marginale du loisir indépendante de l'échelle de la consommation.*

Démonstration : On considère désormais l'équation (14). Cette équation, en logarithme, s'écrit :

$$\log(D_1u(C_t,L)) + \log(X_{N,t}AD_2F(k,N)) = \log(D_2u(C_t,L))$$

En utilisant (15) et en différenciant par rapport à $X_{N,0}$, et en réaménageant les termes, nous obtenons :

$$\frac{D_{11}u(C_t,L)}{D_1u(C_t,L)}C_t + 1 = \frac{D_{21}u(C_t,L)}{D_2u(C_t,L)}C_t \tag{16}$$

$\frac{D_{21}u(C_t,L)}{D_2u(C_t,L)}C_t$ est l'élasticité de l'utilité marginale du loisir par rapport à la consommation que nous posons égale à ξ_{lc}. Sachant que $\frac{D_{11}u(C_t,L)}{D_1u(C_t,L)}C_t = -\sigma(L)$, l'équation (16) nous donne $\xi_{lc} = \frac{D_{21}u(C_t,L)}{D_2u(C_t,L)}C_t = 1 - \sigma(L)$. Ainsi, l'élasticité de l'utilité marginale du loisir par rapport à la consommation est indépendante de l'échelle de la consommation C_t. □

On déduit des lemmes 1 et 2 les formes fonctionnelles des fonctions d'utilité compatibles avec un sentier de croissance équilibrée.

Proposition 3 *:Les préférences compatibles avec un sentier de croissance équilibrée sont de la forme suivante :*

$$u(C,L) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}v(L) \quad pour \quad \sigma \in]0,1[\cup]1,+\infty[$$

$$u(C,L) = \log(C) + v(L) \quad pour \quad \sigma = 1$$

Démonstration : Deux cas doivent être envisagés dans le calcul d'intégration : $\sigma(L) \in]0,1[\cup]1,\infty[$ et $\sigma(L) = 1$.

Cas $\sigma(L) \in]0,1[\cup]1,\infty[$: En utilisant le lemme 1, nous obtenons une expression de l'élasticité de l'utilité marginale de la consommation par rapport à la consommation indépendante du temps : $C\frac{D_{11}u(C,L)}{D_1u(C,L)} = -\sigma(L)$. Une première intégration par rapport à C de cette expression nous donne :

$$\log(D_1u(C,L)) = -\sigma(L)\log(C) + u(L)$$

Cette expression peut se réécrire sous la forme suivante :

$$D_1u(C,L) = C^{\sigma(L)}v_1(L)$$

Comme l'élasticité de l'utilité marginale de la consommation par rapport à la consommation fait intervenir la dérivée seconde de l'utilité, une nouvelle intégration par rapport à C nous donne l'expression de la fonction d'utilité vérifiant le lemme 1 :

$$u(C,L) = \frac{C^{1-\sigma(L)}}{1-\sigma(L)}v_1(L) + v_2(L)$$

$v_1(L)$ et $v_2(L)$ sont les constantes d'intégration, qui ne dépendent que de L.

Nous déterminons alors sous quelles conditions cette fonction d'utilité vérifie le lemme 2. En dérivant u, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
D_1u(C_t,L_t) &= C^{-\sigma(L)}v_1(L) \\
D_2u(C_t,L_t) &= \frac{D\sigma(L)C^{1-\sigma(L)}v_1(L)}{(1-\sigma(L))^2} - \frac{D\sigma(L)C^{-\sigma(L)}v_1(L)}{1-\sigma(L)} \\
&+ \frac{C^{1-\sigma(L)}Dv_1(L)}{1-\sigma(L)} + Dv_2(L) \\
D_{12}u(C_t,L_t) &= -D\sigma(L)C^{-\sigma(L)}v_1(L) + C^{-\sigma(L)}Dv_1(L)
\end{aligned}
$$

L'élasticité ξ_{lc} s'écrit alors :

$$
\xi_{lc} = \frac{-D\sigma(L)C^{-\sigma(L)}v_1(L) + C^{-\sigma(L)}Dv_1(L)}{\frac{D\sigma(L)C^{1-\sigma(L)}v_1(L)}{(1-\sigma(L))^2} - \frac{D\sigma(L)C^{-\sigma(L)}v_1(L)}{1-\sigma(L)} + \frac{C^{1-\sigma(L)}Dv_1(L)}{1-\sigma(L)} + Dv_2(L)}
$$

Il apparaît alors que l'élasticité de l'utilité marginale de la consommation par rapport au loisir sera indépendante de l'échelle de la consommation C, si $D\sigma(L) = 0$ et $Dv_2(L) = 0$, c'est à dire si $\sigma(L)$ et $v_2(L)$ sont des constantes [11]. En posant $\sigma(L) = \sigma$ et $v_1(L) = v(L)$ la fonction d'utilité prend la forme suivante :

$$
u(C,L) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}v(L) + C^{te}
$$

Les préférences étant définies à une constante près, on peut sans perte de généralité poser $C^{te} = 0$, et les préférences prennent la forme définitive suivante :

$$
u(C,L) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}v(L)
$$

Cas $\sigma(L) = 1$: Comme dans le cas précédent, nous utilisons le lemme 1, et obtenons par intégrations successives :

$$
u(C,L) = \log(C)v_1(L) + v_2(L)
$$

Pour montrer que la fonction d'utilité vérifie le lemme 2, une démonstration analogue à celle menée dans le cas précédent conduit à des préférences de la forme :

$$
u(C,L) = \log(C) + v(L) \quad \square
$$

11. On a ainsi démontré que $\sigma(L)$ était bien indépendant du loisir L.

1.4 Précisions sur la notion d'élasticité de substitution intertemporelle

L'écriture générale de la fonction d'utilité fait intervenir indirectement les élasticités de substitution intertemporelle de la consommation et du loisir. Ces élasticités sont d'autre part l'enjeu d'un débat dans la littérature sur les cycles réels. L'objet de cette section est de préciser ce que recouvre exactement ces termes, dans la mesure où il est possible de définir différentes élasticités de substitution [12]. La signification du terme "élasticité de substitution intertemporelle" généralement retenue dans la littérature *RBC* renvoie à la variation de la consommation et du loisir face à une modification contemporaine de leurs prix respectifs laissant inchangée l'utilité marginale de la richesse du ménage. Ces élasticités de substitution sont qualifiées de *frischiennes* par opposition aux élasticités de substitution *marshalliennes* et *hicksiennes*.

Nous présentons la dérivation des fonctions de demande *frischienne* avant d'en dériver les élasticités de substitution intertemporelle. L'ensemble de ces calculs est mené en prévisions parfaites.

1.4.1 Dérivation des demandes *frischiennes*

A partir des conditions d'optimalité (1) et (2), nous définissons le salaire réel ω_t, le salaire nominal w_t et le prix p_t :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial C_t} & = & \beta \Lambda_{t+1} \\ \frac{\partial u}{\partial N_t} & = & \omega_t \beta \Lambda_{t+1} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{\partial u}{\partial C_t} & = & p_t \lambda_t \\ \frac{\partial u}{\partial N_t} & = & w_t \lambda_t \end{array} \right.$$

Où $\beta \Lambda_{t+1} = \lambda_t p_t$ et p_0 est normalisé à 1.

Il est possible à partir de la relation (6) d'exprimer λ_t en fonction de λ_0.

Pour cela, nous introduisons le taux d'intérêt nominal τ_t dans l'équation (6) :

$$1 + \tau_{t+1} = (1 + r_{t+1}) \frac{p_{t+1}}{p_t} = \frac{1}{\beta} \frac{\lambda_t}{\lambda_{t+1}}$$

d'où :

$$\prod_{i=0}^{t-1} (1 + \tau_i) = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{t-1} \prod_{i=0}^{t-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_{i+1}} = \left(\frac{1}{\beta} \right)^{t-1} \frac{\lambda_0}{\lambda_t}$$

12. (MaCurdy 1981) dans le cadre d'un modèle de cycle de vie distingue ainsi très clairement les différentes élasticités de substitution caractérisant le comportement intertemporel de l'agent.

ce qui implique :

$$\lambda_t = \left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1} \frac{\lambda_0}{R_{t-1}}$$

avec

$$R_t = \prod_{i=0}^{t}(1+\tau_i)$$

On peut alors réécrire les conditions d'optimalité comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial C_t} = \lambda_0 p_t \left[\frac{1}{R_{t-1}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1}\right] \quad (17)$$

$$\frac{\partial u}{\partial L_t} = \lambda_0 w_t \left[\frac{1}{R_{t-1}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1}\right] \quad (18)$$

En résolvant ce système en C_t et L_t, il est possible d'exprimer ces variables en fonction des prix w_t et p_t, et du prix implicite, ce qui correspond à l'expression des demandes *frischiennes* :

$$\begin{aligned} C_t^\star &= C(w_t, p_t, \lambda_0) \\ L_t^\star &= C(w_t, p_t, \lambda_0) \end{aligned}$$

λ_0 résume toute l'information disponible sur les variables entrant dans la contrainte intertemporelle. Les décisions contemporaines de consommation et de loisir dépendent des prix et salaires futurs uniquement par l'intermédiaire de λ_0.

On définit alors (voir (MaCurdy 1981)) les élasticités de substitution intertemporelles de la consommation et du loisir de la façon suivante :

$$\epsilon_c = \frac{p_t}{C_t^\star}\left(\frac{\partial C_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0}$$

$$\epsilon_l = \frac{w_t}{L_t^\star}\left(\frac{\partial L_t^\star}{\partial w_t}\right)_{\lambda_0}$$

1.4.2 Dérivation de l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation

Les équations (17) et (18) prises en $C_t^\star = C(w_t, p_t, \lambda_0)$ et $L_t^\star = L(w_t, p_t, \lambda_0)$, se réécrivent :

$$
\begin{aligned}
D_1u(C_t^\star, L_t^\star) &= \lambda_0 p_t \left[\frac{1}{R_{t-1}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1}\right] \\
D_2u(C_t^\star, L_t^\star) &= \lambda_0 w_t \left[\frac{1}{R_{t-1}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1}\right]
\end{aligned}
$$

En différentiant ces deux équations par rapport à p_t à w_t à λ_0 donné, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial C_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0} D_{11}u(C_t^\star, L_t^\star) + \left(\frac{\partial L_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0} D_{12}u(C_t^\star, L_t^\star) &= \lambda_0 \left[\frac{1}{R_{t-1}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1}\right] \\
\left(\frac{\partial C_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0} D_{12}u(C_t^\star, L_t^\star) + \left(\frac{\partial L_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0} D_{22}u(C_t^\star, L_t^\star) &= 0
\end{aligned}
$$

Nous obtenons ainsi un système de deux équations à deux inconnues en $\left(\frac{\partial C_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0}$ et $\left(\frac{\partial L_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0}$. La résolution de ce système donne pour $\left(\frac{\partial C_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0}$ l'expression :

$$
\left(\frac{\partial C_t^\star}{\partial p_t}\right)_{\lambda_0} = \frac{D_{22}u(C_t^\star, \partial L_t)\lambda_0}{D_{11}u(C_t^\star, \partial L_t)D_{22}u(C_t^\star, \partial L_t) - [D_{12}u(C_t^\star, \partial L_t)]^2}\left[\frac{1}{R_{t-1}}\left(\frac{1}{\beta}\right)^{t-1}\right]
$$

En substituant cette équation dans la définition de l'élasticité intertemporelle de subsitution de la consommation, nous obtenons en réarangeant les termes et en omettant l'indice temporel :

$$
\epsilon_c = \frac{D_{22}u(C, L)}{D_{11}u(C, L)D_{22}u(C, L) - [D_{12}u(C, L)]^2}\frac{D_1u(C, L)}{C}
$$

d'où l'expression de l'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation :

$$
\epsilon_c = \frac{\xi_{ll}}{\xi_{cc}\xi_{ll} - \xi_{cl}\xi_{lc}}
$$

en notant :

$$
\begin{aligned}
\xi_{cc} &= C\frac{D_{11}u(C, L)}{D_1u(C, L)} \quad \xi_{ll} = L\frac{D_{22}u(C, L)}{D_2u(C, L)} \\
\xi_{lc} &= C\frac{D_{21}u(C, L)}{D_2u(C, L)} \quad \xi_{cl} = L\frac{D_{12}u(C, L)}{D_1u(C, L)}
\end{aligned}
$$

Ces expressions désignent respectivement les élasticités de l'utilité marginale de la consommation par rapport au loisir, de l'utilité marginale du loisir par rapport au loisir, de l'utilité marginale du loisir par rapport à la consommation et de l'utilité marginale de la consommation par rapport au loisir.

1.4.3 Dérivation de l'élasticité de substitution intertemporelle du loisir

Par un raisonnement similaire au précédent, on obtient :

$$\begin{aligned}\epsilon_l &= \frac{D_{11}u(C_t,L_t)}{D_{11}u(C,L)D_{22}u(C,L)-(D_{12}u(C,L))^2}\frac{D_2u(C,L)}{L}\\ &= \frac{\xi_{cc}}{\xi_{cc}\xi_{ll}-\xi_{cl}\xi_{lc}}\end{aligned}$$

L'élasticité de substitution intertemporelle du travail par rapport au salaire, sachant que $N_t = 1 - L_t$, se déduit directement de l'expression précédente :

$$\epsilon_n = \frac{w_t}{N_t}\left(\frac{\partial N_t}{\partial w_t}\right)_{\lambda_0} = -\frac{1-N_t}{N_t}\epsilon_L \tag{19}$$

1.4.4 Exemples

Fonction d'utilité multiplicativement séparable : Pour une fonction d'utilité de la forme :

$$u(C,L) = \frac{C^{1-\sigma}}{1-\sigma}v(L)$$

nous avons $\xi_{cc} = -\sigma$, $\xi_{lc} = 1-\sigma$, $\xi_{cl} = \frac{LDv(L)}{v(L)}$ et $\xi_{ll} = \frac{LD^2v(L)}{v(L)}$. Nous déduisons alors des formules précédentes les valeurs des élasticités de substitution :

$$\begin{aligned}\epsilon_c &= = -\frac{\xi_{ll}}{\sigma\xi_{ll}+(1-\sigma)\xi_{cl}}\\ \epsilon_l &= \frac{\sigma}{\sigma\xi_{ll}+(1-\sigma)\xi_{cl}}\end{aligned}$$

Il apparaît ici clairement que les élasticités intertemporelles de substitution de la consommation et du loisir sont indépendantes de l'échelle de la consommation.

Fonction d'utilité additivement séparable Pour une fonction de la forme :

$$u(C, L) = \log(C) + v(L)$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \epsilon_n &= \frac{1}{\xi_{ll}} \\ \epsilon_c &= -1 \end{aligned}$$

Nous retrouvons ainsi l'expression de l'élasticité de l'offre de travail donnée par (King, Plosser et Rebelo 1988).

Economie avec travail indivisible et loterie : On ce place dans le cas d'une fonction d'utilité additivement séparable. Sous les hypothèses d'indivisibilité du travail et d'existence de loterie, (Hansen 1985) et (Rogerson 1988) montrent que l'utilité du ménage se réécrit [13] :

$$u(C, L) = \log(C) - B(1 - L) = \log(C) - BN$$

et nous obtenons :

$$\begin{aligned} \epsilon_c &= 0 \\ \epsilon_l &= -\infty \end{aligned}$$

2 Cycles réels et modèle de croissance néoclassique

Sous les conditions assurant l'existence d'un sentier de croissance équilibrée, la résolution des équations d'Euler permet de déterminer les trajectoires suivies par les variables du modèles (C, N, K, λ) pour les processus déterministes et stochastiques exogènes de (X_N, A). Une telle résolution analytique n'est cependant pas possible, sauf à prendre le cas irréaliste d'une dépréciation totale du capital ((Long et Plosser 1983) et (McCallum 1988)).

Plusieurs méthodes de résolution approchée sont alors envisagées dans la littérature, comme le montre (Rebelo 1988). Dans tous les cas, ces techniques que nous décrirons succinctement ont pour objectif de déterminer le comportement cyclique du modèle , i.e. son évolution autour de l'équilibre stationnarisé lorsqu'il est soumis à des chocs aléatoires.

13. Cette hypothèse est généralement adoptée dans la littérature *RBC*, dans la mesure où elle permet d'obtenir une variabilité des heures travaillées supérieure à celle de la productivité du travail, ce qui est conforme à l'observation.

Un premier groupe de méthodes consiste à choisir un ensemble discret de valeurs pour l'espace des variables d'état (en l'occurrence K et A) et à résoudre le problème par itérations sur une écriture en termes de programmation dynamique du modèle ((Danthine, Donaldson et Mehra 1989)) ou sur les conditions d'Euler définissant l'équilibre concurrentiel ((Baxter 1988)). Ces méthodes sont en général assez coûteuses en temps de calcul.

Un second groupe de méthodes utilise une approximation linéaire quadratique du problème. Ces méthodes s'avèrent nettement plus parcimonieuses en temps de calcul. Il s'agit dans ce cas de remplacer le problème initial par un problème où la fonction objectif est quadratique et les contraintes linéaires. Comme le souligne (Rebelo 1988), cette approche demeure valide tant que la variance des chocs affectant le système est faible. Dans un tel cas, l'économie n'est en effet jamais trop éloignée de l'équilibre stationnaire et une approximation de Taylor reste valable.

Pour ces méthodes d'approximation linéaire quadratique, la première étape consiste à calculer l'équilibre stationnarisé du modèle. Dans une seconde étape, il existe plusieurs manières de prendre une approximation linéaire quadratique. Une première stratégie consiste à substituer les contraintes non linéaires dans la fonction objectif, puis à prendre une approximation linéaire quadratique de cette fonction. L'écriture de la forme récursive du modèle (où la fonction valeur est désormais également linéaire quadratique) permet alors une détermination de la fonction valeur et des règles de décisions par itérations sur la fonction valeur ((Kydland et Prescott 1982) ou (Cooley et Hansen 1989) par exemple) ou par discrétisation de l'espace des variables d'état ((Danthine et Donaldson 1991)). Une seconde stratégie consiste à linéariser directement les conditions d'Euler. On obtient alors une système linéaire d'équations aux différences qu'il est relativement facile de résoudre, comme l'ont illustré (King et al. 1987).

L'ensemble des méthodes de linéarisation considère une version en *prévision parfaite* et justifie la coïncidence de cette solution avec la solution du modèle stochastique en invoquant la propriété d'*équivalent-certain* du modèle ; la linéarisation du modèle rend les règles de décisions indépendantes des moments d'ordre supérieur à un des chocs. Il nous semble qu'un tel argument mérite d'être développé précisément, et nous nous proposons dans un premier temps de résoudre une version log-linéarisée du modèle sans faire appel à un argument d'équivalent-certain, et en traitant explicitement la présence d'anticipations rationnelles. Nous établissons que la sélection de la trajectoire selle du modèle linéarisé découle de la condition de transversalité du modèle initial. Nous démontrons également l'existence d'une trajectoire selle dans le modèle de (Hansen 1985).

Dans un second temps, nous montrons comment la littérature *RBC* exploite la solution approchée du modèle pour en déterminer ses propriétés cycliques.

2.1 Résolution approchée du modèle

Nous stationnarisons le modèle avant d'en linéariser les conditions d'Euler et d'en donner la solution sous forme Etat-Mesure.

2.1.1 Stationnarisation du modèle

Une transformation du modèle initial où toutes les variables réelles croissent à un taux constant γ, taux de croissance du progrès technique augmentant le travail X_N, permet de se ramener à une forme stationnaire. Nous linéarisons les conditions d'Euler autour de l'équilibre stationnaire de cette économie transformée. Nous adoptons dans la suite de l'exposé une fonction de production Cobb-Douglas.

En définissant les variables efficientes $c_t = C_t/X_{N,t}$, $k_t = K_t/X_{N,t}$, $y_t = Y_t/X_{N,t}$ et $i_t = I_t/X_{N,t}$, la fonction d'utilité du ménage se réécrit :

$$U = (X_{N,0}^{1-\sigma}) \sum_{t=0}^{+\infty} (\beta^\star)^t \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} v(L_t)$$

avec $\beta^\star = \beta(\gamma)^{1-\sigma}$. Pour assurer la finitude de l'objectif U, nous ferons la restriction supplémentaire sur les préférences :

$$\beta^\star < 1 \Longleftrightarrow \beta < \gamma^{\sigma-1}$$

On négligera par la suite le terme $X_{N,0}^{1-\sigma}$ sans affecter les préférences de l'agent, celles-ci étant définies à une fonction croissante près.

La contrainte budgétaire se réécrit sous la forme :

$$\gamma k_{t+1} = (1-\delta)k_t + A_t k_t^\alpha N_t^{1-\alpha} - c_t$$

et l'on peut écrire l'équation de Bellman du problème stationnarisé :

$$\begin{aligned} V(k_t, A_t) &= \max_{c_t, N_t} \left\{ \frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} v(1-N_t) + \beta^\star E_t \left[V(k_{t+1}, A_{t+1}) \right] \right\} \\ \text{s.c.} & \\ \gamma k_{t+1} &= (1-\delta)k_t + A_t k_t^{1-\alpha} N_t^\alpha - c_t \end{aligned}$$

En réécrivant à la date $t+1$ la condition de l'enveloppe et en prenant son espérance conditionnelle, les conditions d'Euler du problème sont données par :

$$c_t^{-\sigma} v(1-N_t) - \beta^\star E_t[\lambda_{t+1}] = 0 \quad (20)$$

$$\frac{c_t^{1-\sigma}}{1-\sigma} D v(1-N_t) - \beta^\star E_t \left[\lambda_{t+1}(1-\alpha) A_t k_t^\alpha N_t^{-\alpha} \right] = 0 \quad (21)$$

$$E_t\left[\lambda_{t+2}\left(1-\delta+\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha}\right)\right]-\gamma\frac{E_t\left[\lambda_{t+1}\right]}{\beta^\star} = 0 \quad (22)$$

$$(1-\delta)k_t+A_tk_t^{1-\alpha}N_t^\alpha-c_t = \gamma k_{t+1} \quad (23)$$

$$\lim_{t\to\infty}E_0\left[\beta^{\star t}\lambda_t k_t\right] = 0 \quad (24)$$

avec $\lambda_{t+1}=\frac{\partial V(k_{t+1},A_{t+1})}{\partial k_{t+1}}$

2.1.2 Linéarisation des conditions d'Euler

Nous log-linéarisons ces conditions d'optimalité au voisinage de l'équilibre stationnaire, en notant $\widehat{w}_t$ l'écart relatif de la variable w_t à son niveau stationnaire w.

La linéarisation des deux premières conditions d'optimalité donne :

$$\xi_{cc}\widehat{c}_t-\xi_{cl}\frac{N}{1-N}\widehat{N}_t-E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right]=0 \quad (25)$$

$$\xi_{lc}\widehat{c}_t-\xi_{ll}\frac{N}{1-N}\widehat{N}_t-E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right]-\widehat{A}_t+\alpha\widehat{k}_t-\alpha\widehat{N}_t=0 \quad (26)$$

avec $\xi_{cc}=-\sigma$, $\xi_{cl}=\frac{LDv(L)}{v(L)}$, $\xi_{lc}=1-\sigma$ et $\xi_{ll}=\frac{LD^2v(L)}{Dv(L)}$. Comme nous l'avons montré plus haut, les ξ sont liés aux élasticités intertemporelles de substitution.

En approximant la troisième condition d'optimalité, nous obtenons :

$$E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+2}\right]+\eta_AE_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right]+\eta_kE_t\left[\widehat{k}_{t+1}\right]+\eta_NE_t\left[\widehat{N}_{t+1}\right]=E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right] \quad (27)$$

Les η sont les élasticités de la productivité marginale du capital (nette de la dépréciation) par rapport aux différentes variables $(\widehat{A}_t,\widehat{k}_t,\widehat{N}_t)$, évaluées à l'équilibre stationnaire :

$$\begin{aligned}\eta_A &= \frac{[\gamma-\beta(1-\delta)]}{\gamma}\\ \eta_K &= (\alpha-1)\frac{[\gamma-\beta(1-\delta)]}{\gamma}\\ \eta_N &= (1-\alpha)\frac{[\gamma-\beta(1-\delta)]}{\gamma}\end{aligned}$$

L'approximation de la fonction de production et de la contrainte de ressources donne :

$$\widehat{y}_t=\widehat{A}_t+\alpha\widehat{k}_t+(1-\alpha)\widehat{N}_t \quad (28)$$

$$\widehat{y}_t = s_c \widehat{c}_t + \phi s_i \widehat{k}_{t+1} - (\phi - 1) s_i \widehat{k}_t \tag{29}$$

où s_c et s_i représentent les parts respectives de la consommation et de l'investissement dans le produit :

$$\begin{aligned} s_i &= \frac{(\gamma^\star - (1-\delta)\beta^\star \alpha)}{\gamma - \beta(1-\delta)} \\ s_c &= 1 - s_i \end{aligned}$$

et $\phi = K_{t+1}/I_t = \gamma/[\gamma - (1-\delta)] > 1$. Il est alors aisé d'obtenir la productivité du travail $\widehat{p}$ et l'investissement.

$$\widehat{p} = \widehat{y}_t - \widehat{N}_t = \widehat{A}_t + \alpha \widehat{k}_t - \alpha \widehat{N}_t \tag{30}$$

$$\widehat{i}_t = \frac{1}{s_i} \widehat{y}_t - \frac{s_c}{s_i} \widehat{c}_t \tag{31}$$

Ces équations définissent alors un système linéaire récurrent du premier ordre.

2.1.3 Ecriture de la solution du modèle sous forme Etat-Mesure

Les équations (25) et (26) relient les variables de contrôle $\widehat{c}_t$ et $\widehat{N}_t$ aux variables d'état $\widehat{k}_t$, $\widehat{A}_t$ et de co-état $E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right]$. Sous forme matricielle, ce sous-système se réécrit de la façon suivante :

$$M_1 \begin{pmatrix} \widehat{c}_t \\ \widehat{N}_t \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} \widehat{k}_t \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_t\right] \end{pmatrix} + M_3 \widehat{A}_t \tag{32}$$

Les équations (27), (28) et (29) décrivent l'évolution des variables d'état $\widehat{k}_t$ et de co-état $\widehat{\lambda}_t$ en fonction des variables de contrôle et des états exogènes $\widehat{A}_t$ (après élimination de y par substitution de (28) dans (29)) :

$$M_4(L) \begin{pmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+2}\right] \end{pmatrix} = M_5(L) \begin{pmatrix} E_t\left[\widehat{c}_{t+1}\right] \\ E_t\left[\widehat{N}_{t+1}\right] \end{pmatrix} + M_6(L) E_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right] \tag{33}$$

où les matrices M_1, M_2, M_3 sont à coefficients réels, et $M_4(L)$, $M_5(L)$, $M_6(L)$ des matrices polynômiales d'ordre maximum un et à coefficients réels.

Sous l'hypothèse d'inversibilité de M_1, il est possible de réécrire l'évolution des variables d'état et de co-état en fonction uniquement d'elles-mêmes et de la variable d'état exogène, en substituant (32) dans (33). Cette propriété d'inversibilité, liée à la forme des fonctions d'utilité et de production, est nécessaire à l'existence de règles de décisions univoques et permet d'obtenir l'expression des contrôles $\widehat{c}$ et $\widehat{N}$ en fonction des états $\widehat{k}$ et $\widehat{\lambda}$.

Proposition 4 *Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), il existe des règles de décisions univoques dans le modèle linéarisé.*

Démonstration : La matrice M_1 est donnée par :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \left(\frac{D_{11}u(c,L)}{D_1u(c,L)}\right)c & -N\left(\frac{D_{12}u(c,L)}{D_1u(c,L)}\right) \\ \left(\frac{D_{21}u(c,L)}{D_2u(c,L)}\right)c & -N\left(\left(\frac{D_{22}u(c,L)}{D_2u(c,L)}\right)+\left(\frac{D_{22}F(k,N)}{D_2F(k,N)}\right)\right) \end{pmatrix}$$

et le déterminant de M_1 est donné par l'expression :

$$\begin{aligned} \det(M_1) &= -\left(\frac{cN}{D_1u(c,L)D_2u(c,L)}\right)(D_{11}u(c,L)D_{22}u(c,L) - D_{12}u(c,L)D_{21}u(c,L)) \\ &- cN\left(\frac{D_{11}u(c,L)}{D_1u(c,L)}\right)\left(\frac{D_{22}F(k,N)}{D_2F(k,N)}\right) \end{aligned}$$

La fonction d'utilité étant strictement concave par hypothèse, les deux valeurs propres de la matrice Hessienne associée sont négatives et son déterminant est positif, soit :

$$D_{11}u(c,L)D_{22}u(c,L) - D_{12}u(c,L)D_{21}u(c,L) > 0$$

Une stricte concavité de la fonction de production assure alors que le deuxième terme de l'expression du déterminant est positif (car $D_{22}F(k,N) < 0$), ce qui assure une stricte négativité du déterminant de M_1 et donc l'inversibilité de la matrice. □

Le système linéarisé se récrit alors sous la forme état-mesure suivante :

$$\begin{pmatrix} E_t\left[\widehat{c}_{t+1}\right] \\ E_t\left[\widehat{N}_{t+1}\right] \end{pmatrix} = M_1^{-1}M_2 \begin{pmatrix} E_t\left[\widehat{k}_{t+1}\right] \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+2}\right] \end{pmatrix} + M_1^{-1}M_3 \quad E_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right]$$

et

$$\begin{pmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+2}\right] \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} \widehat{k}_t \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right] \end{pmatrix} + RE_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right] + Q\widehat{A}_t \tag{34}$$

où

$$\begin{aligned} W &= [M_4(1) - M_5(1)M_1^{-1}M_2]^{-1}[M_5(0)M_1^{-1}M_2 - M_4(0)] \\ R &= [M_4(1) - M_5(1)M_1^{-1}M_2]^{-1}[M_5(1)M_1^{-1}M_3 + M_6(1)] \\ Q &= [M_4(1) - M_5(1)M_1^{-1}M_2]^{-1}[M_5(0)M_1^{-1}M_3 + M_6(0)] \end{aligned}$$

Nous reprenons (Blanchard et Kahn 1980) pour résoudre ce système dynamique linéaire sous anticipations rationnelles .

La résolution repose sur la diagonalisation de W et l'on note μ_1 et μ_2 les deux valeurs propres associées à W, avec $|\mu_1| < |\mu_2|$. L'existence et l'unicité de la trajectoire du modèle au voisinage de l'état stationnaire sont liées à une condition sur la position des valeurs propres relativement au cercle unité. Le modèle comporte une variable prédéterminée k et une variable anticipée λ, il devra donc exhiber une valeur propre de module supérieur à un et une de module inférieur à un. Un premier résultat montre que le produit des valeurs propres est constant.

Proposition 5 *Les valeurs propres μ_1 et μ_2 de la matrice W vérifient la propriété :*

$$\mu_1 \mu_2 = \frac{1}{\beta^\star}$$

Démonstration : La démonstration [14] est présentée en annexe et s'inspire de (Levhari et Liviatan 1972).

Corrolaire 1 *S'il existe une trajectoire selle —i.e. $|\mu_1| < 1$— on a :*

$$|\mu_2| > \frac{1}{\beta^\star}$$

et les deux valeurs propres sont réelles et positives.

Démonstration : La démonstration de ce corrolaire est présentée en annexe.

L'existence d'une trajectoire selle est liée à la condition $|\mu_1| < 1$. (King et al. 1987) démontrent l'existence d'une solution dans un cas simple :

Proposition 6 ((King et al. 1987) (p.23)) *Lorsque la fonction d'utilité est logarithmique dans la consommation ($\sigma = 1$) et l'offre de travail inélastique [15], les valeurs propres μ_1 et μ_2 vérifient la condition :*

$$\mu_1 < 1 < \beta^{\star -1} < \mu_2$$

On peut élargir ce résultat à un modèle avec offre de travail endogène :

Proposition 7 *Lorsque la fonction d'utilité est logarithmique dans la consommation et linéaire dans le travail (modèle de (Hansen 1985)) [16], la condition $\alpha > 0$ est nécessaire et suffisante pour que les valeurs propres μ_1 et μ_2 vérifient :*

$$\mu_1 < 1 < \beta^{\star -1} < \mu_2$$

14. Nous remercions P.Michel pour avoir porté à notre connaissance cette référence.

15. Cette hypothèse sur l'offre de travail ne revêt cependant qu'un intérêt économique limité dans le cadre d'un modèle *RBC*.

16. Nous avons déjà souligné l'intérêt économique d'une telle hypothèse qui renvoit à l'existence d'indivisibilité de l'offre de travail et à la présence de loteries sur le marché du travail.

Démonstration : Un calcul fastidieux permet d'obtenir l'expression analytique de la valeur propre μ_1 :

$$\mu_1 = \frac{-\alpha}{-1+\beta-\alpha\beta-\beta\delta+\alpha\beta\gamma}$$

On vérifie alors que $\mu_1 < 1$ si et seulement si $\alpha < 1$. La proposition 5 assure alors que $\mu_2 > \beta^{\star-1}$. □

Dans le cas général, il ne nous a pas été analytiquement possible de montrer que μ_1 était infèrieur à 1. Cependant, des simulations numériques assurent ce résultat pour une large plage de valeurs des paramètres [17]. Il est à noter que la conjecture de (King et al. 1987) (p.25) :

"$\mu_1 < \beta^{\star 1/2} < 1 < \beta^{\star -1/2} < \mu_2$ pour toute économie sans distorsion"

n'est pas exacte. En effet, (Long et Plosser 1983) montrent que la valeur propre la plus faible du modèle μ_1 est égale à l'élasticité α de la production par rapport au capital dans un cas Cobb-Douglas et lorsque la dépréciation du capital est totale ($\delta = 1$). Un contre exemple à cette conjecture est alors obtenu pour $\delta = 1$ et $\alpha > \beta^{\star 1/2}$.

Sous la condition $\mu_1 < 1$, il existe une unique trajectoire selle $\{\widehat{k}_t\}_{t=0}^{\infty}$, $\{\widehat{\lambda}_t\}_{t=0}^{\infty}$ solution du problème. Il existe en effet une valeur unique de $\widehat{\lambda}_0$ pour laquelle la solution $\{\widehat{k}_t\}_{t=0}^{\infty}$ et $\{\widehat{\lambda}_t\}_{t=0}^{\infty}$ est compatible avec la condition de transversalité. Afin de déterminer cette condition initiale, on effectue un changement de base qui permet de réécrire le système sous une forme diagonale, et l'on définit les variables $\widetilde{k}$ et $\widetilde{\lambda}$ par :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{k}_t \\ \widetilde{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \widehat{k}_t \\ E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+1}\right] \end{pmatrix} \tag{35}$$

En notant

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}\ ,\ P^{-1} = \begin{pmatrix} P^{\star}_{11} & P^{\star}_{12} \\ P^{\star}_{21} & P^{\star}_{22} \end{pmatrix}\ ,\ R = \begin{pmatrix} R_{ka} \\ R_{\lambda a} \end{pmatrix}\ ,\ Q = \begin{pmatrix} Q_{ka} \\ Q_{\lambda a} \end{pmatrix}$$

l'évolution de $\widetilde{k}$ et $\widetilde{\lambda}$ est donnée par :

$$\widetilde{k}_{t+1} = \mu_1 \widetilde{k}_t + [P^{\star}_{11}R_{ka} + P^{\star}_{12}R_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right] + [P^{\star}_{11}Q_{ka} + P^{\star}_{12}Q_{\lambda a}]\widehat{A}_t \tag{36}$$

$$E_t\left[\widetilde{\lambda}_{t+2}\right] = \mu_2 \widetilde{\lambda}_{t+1} + [P^{\star}_{21}R_{ka} + P^{\star}_{22}R_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right] + [P^{\star}_{21}Q_{ka} + P^{\star}_{22}Q_{\lambda a}]\widehat{A}_t \tag{37}$$

Cette dernière équation doit être résolue vers l'avant pour en déterminer la solution, dans la mesure où $\mu_2 > 1$. On exprime donc $\widetilde{\lambda}_{t+1}$ en fonction de son futur :

$$\widetilde{\lambda}_{t+1} = \mu_2^{-1} E_t\left[\widetilde{\lambda}_{t+2}\right] - \mu_2^{-1}[P^{\star}_{21}R_{ka} + P^{\star}_{22}R_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right] - \mu_2^{-1}[P^{\star}_{21}Q_{ka} + P^{\star}_{22}Q_{\lambda a}]\widehat{A}_t$$

17. Voir à ce titre (Hairault 1991).

soit par substitutions successives :

$$\begin{aligned}\widetilde{\lambda}_{t+1} &= \lim_{T\to\infty}\left(-\sum_{j=0}^{T}\mu_2^{-j-1}[P_{21}^{\star}R_{ka}+P_{12}^{\star}R_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+j+1}\right]\right.\\ &- \left.\sum_{j=0}^{T}\mu_2^{-j-1}[P_{21}^{\star}Q_{ka}+P_{12}^{\star}Q_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+j}\right]+\mu_2^{-T}E_t\left[\widetilde{\lambda}_{t+T}\right]\right) \qquad (38)\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\widetilde{\lambda}_{t+1} = \lim_{T\to\infty}\left(h_{t+T}+\mu_2^{-T}E_t\left[\widehat{\lambda}_{t+T}\right]\right) \qquad (39)$$

avec

$$\begin{aligned}h_{t+T} &= -\sum_{j=0}^{T}\mu_2^{-j-1}[P_{21}^{\star}R_{ka}+P_{12}^{\star}R_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+j+1}\right]\\ &- \sum_{j=0}^{T}\mu_2^{-j-1}[P_{21}^{\star}Q_{ka}+P_{12}^{\star}Q_{\lambda a}]E_t\left[\widehat{A}_{t+j}\right]\end{aligned}$$

μ_2 étant de module supérieur à un, les coefficients des matrices P, P^{-1}, R et Q réels et le processus suivi par A_t stationnaire, h_{t+T} converge vers une limite finie lorsque T tend vers l'infini. En effet, pour des processus de $\{\widehat{A}\}_{t=0}^{\infty}$ correspondant à des modèles ARMA, le calcul de $\lim_{T\to\infty} h_{t+T}$ est donné par (Hansen et Sargent 1980). Si l'on considère un $AR(1)$, ce calcul est particulièrement simple :

$$\lim_{T\to\infty} h_{t+T} = (Z_1\rho+Z_0)(1-\mu_2^{-1}\rho)^{-1}\widehat{A}_t$$

avec $Z_0 = \mu_2^{-1}(P_{21}^{\star}Q_{ka}+P_{22}^{\star}Q_{\lambda a})$ et $Z_1 = \mu_2^{-1}(P_{21}^{\star}R_{ka}+P_{22}^{\star}R_{\lambda a})$.

$\widetilde{\lambda}_{t+1}$ prendra donc une valeur finie si la limite de $\mu_2^{-T}E_t\left[\widetilde{\lambda}_{t+T}\right]$ est finie lorsque T tend vers l'infini.

Proposition 8 *Sous la condition de transversalité (24), on a l'égalité :*

$$\lim_{T\to\infty}\mu_2^{-T}E_t\left[\widetilde{\lambda}_{t+T}\right] = 0$$

Démonstration : En notant $\overline{k}$ et $\overline{\lambda}$ les valeurs d'état stationnaire, la condition de transversalité se réécrit, par définition de $\widehat{k}$ et $\widehat{\lambda}$:

$$\lim_{T\to\infty} E_t\left[\beta^{\star t+T}\overline{k}\left(1+\widehat{k}_{t+T}\right)\overline{\lambda}\left(1+\widehat{\lambda}_{t+T}\right)\right] = 0$$

$\widetilde{k}$ et $\widetilde{\lambda}$ étant des combinaisons linéaires de $\widehat{k}$ et $\widehat{\lambda}$, il existe un unique triplet réel (a_1,a_2,a_3) tel que :

$$1+a_1\widetilde{k}_{t+T}+a_2\widetilde{\lambda}_{t+T}+a_3\widetilde{k}_{t+T}\widetilde{\lambda}_{t+T} = \left(1+\widehat{k}_{t+T}\right)\left(1+\widehat{\lambda}_{t+T}\right)$$

Sachant que $\widetilde{k}_{t+T} = \widetilde{k}_0 \mu_1^{t+T} + g(t)$ où $g(t)$ est une fonction de la chronique des chocs entre 0 et t à valeurs finies et vérifiant $\lim_{t\to\infty} g(t) < \infty$, la condition de transversalité se réécrit :

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left[\beta^{\star t+T} (a_1 \widetilde{k}_0 \mu_1^{t+T} + \widetilde{\lambda}_{t+T} \left(a_2 + a_3 \widetilde{k}_0 \mu_1^{t+T} + a_3 g(t) \right) \right] = 0$$

Le premier terme de l'expression sous la limite admet une limite finie (nulle) dans la mesure où μ_1 est de module inférieur à un, et la condition de transversalité se réécrit :

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left[\left(\mu_2^T \beta^{\star t+T} \mu_2^{-T} \widetilde{\lambda}_{t+T} \right) \left((a_2 + a_3 \widetilde{k}_0 \mu_1^{t+T} + a_3 g(t) \right) \right] = 0$$

Le second terme de l'expression sous la limite admet une limite finie a_2, et la limite se réécrit :

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left[\left(\mu_2^T \beta^{\star t+T} \mu_2^{-T} \widetilde{\lambda}_{t+T} \right) \right] = 0$$

D'après le corrolaire de la proposition 5, nous avons $\mu_2 > \frac{1}{\beta^\star}$. On a alors

$$\lim_{T\to\infty} \mu_2^T \beta^{\star t+T} = \infty$$

et l'équation précédente implique nécessairement :

$$\lim_{T\to\infty} E_t \left[\mu_2^{-T} \widetilde{\lambda}_{t+T} \right] = 0 \Longleftrightarrow \lim_{T\to\infty} \mu_2^{-T} E_t \left[\widetilde{\lambda}_{t+T} \right] = 0$$

□

$\widetilde{\lambda}_{t+1}$ prend donc une valeur finie et l'on peut réécrire les équations (36) et (38) sous la forme du système suivant :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{k}_{t+1} \\ \widetilde{\lambda}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{k}_t \\ E_t \left[\widehat{\lambda}_{t+1} \right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11}^\star R_{ka} + P_{12}^\star R_{\lambda a} \\ 0 \end{pmatrix} E_t \left[\widehat{A}_{t+1} \right] + \begin{pmatrix} P_{11}^\star Q_{ka} + P_{12}^\star Q_{\lambda a} \\ 0 \end{pmatrix} \widehat{A}_t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{t+1} \quad (40)$$

En prémultipliant ce système par P, nous récupérons les déviations à l'état stationnaire :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ E_t(\widehat{\lambda}_{t+2}) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P_{11}\mu_1 P_{11}^\star & P_{11}\mu_1 P_{12}^\star \\ P_{21}\mu_1 P_{11}^\star & P_{21}\mu_1 P_{12}^\star \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{k}_t \\ E_t \left[\widehat{\lambda}_{t+1} \right] \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} P_{11}(P_{11}^\star R_{ka} + P_{12}^\star R_{\lambda a}) \\ P_{21}(P_{11}^\star R_{ka} + P_{12}^\star R_{\lambda a}) \end{pmatrix} E_t \left[\widehat{A}_{t+1} \right] \\ &+ \begin{pmatrix} P_{11}(P_{11}^\star Q_{ka} + P_{12}^\star Q_{\lambda a}) \\ P_{21}(P_{11}^\star Q_{ka} + P_{12}^\star Q_{\lambda a}) \end{pmatrix} \widehat{A}_t + \begin{pmatrix} P_{12} \\ P_{22} \end{pmatrix} \widetilde{\lambda}_{t+1} \end{aligned} \quad (41)$$

En introduisant les équations (35) et (37) dans le système, nous obtenons l'équation d'évolution de $\widehat{k}_t$:

$$\widehat{k}_{t+1} = P_{11}\mu_1 P_{11}^{-1}\widehat{k}_t + (P_{11}\mu_1 P_{12}^{\star} + P_{12}\mu_2 P_{22}^{\star})P_{22}^{\star -1}\widetilde{\lambda}_{t+1} + R_{ka}E_t\left[\widehat{A}_{t+1}\right] + Q_{ka}\widehat{A}_t$$

En utilisant cette dernière équation et en remplaçant $\widetilde{\lambda}_{t+1}$ par sa valeur, il est alors possible d'exprimer l'évolution du capital en fonction de son passé immédiat et du choc exogène. On obtient alors la loi d'évolution des variables d'état :

$$\begin{pmatrix} \widehat{k}_{t+1} \\ \widehat{A}_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \pi_{kA} \\ 0 & \rho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{k}_t \\ \widehat{A}_t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon_{A,t+1} \end{pmatrix}$$

soit avec les notations évidentes :

$$S_{t+1} = MS_t + \epsilon_{t+1} \tag{42}$$

Z_t étant le vecteur regroupant la consommation, les heures travaillées, le produit, l'investissement, la productivité du travail et le taux d'intérêt, on peut écrire l'évolution de ces dernières sous la forme suivante :

$$Z_t = \Pi S_t \tag{43}$$

Les équations (42) et (43) représentent la solution sous forme Etat-Mesure du modèle. On vérifie ainsi que seule l'espérance du choc technologique est entrée dans le calcul de la solution, et que le modèle vérifie donc bien la propriété d'*équivalent certain*. Les matrices Π et M dépendent de façon complexe des paramètres entrant dans les fonctions d'utilité et de production. Ce sont ces deux équations qui permettent le calcul des propriétés cycliques du modèle.

2.2 Calcul des propriétés cycliques du modèle

La méthode de validation des modèles des cycles réels repose d'une part sur une comparaison des principaux moments (variances, corrélations croisées, autocorrélation) des variables macroéconomiques observées avec ceux obtenus par simulation du modèle [18] et d'autre part sur une comparaison des fonctions de réponses estimées de ces variables à des chocs exogènes avec celles calculées avec le modèle [19]. La portée de ces exercices de validation quantitative et qualitative est alors liée au choix des valeurs d'étalonnage. Il s'agit de fixer les paramètres du modèle à des valeurs soit estimées, soit calculées, à partir de grandeurs observées [20]. En particulier, la spécification du processus des chocs affectant le système économique doit

18. On peut qualifier de *quantitative* cette méthode de validation.

19. On peut qualifier de *qualitative* cette méthode de validation.

20. La démarche la plus rigoureuse consiste en une estimation de ces paramètres, comme le font (Burnside, Eichenbaum et Rebelo 1990) en utilisant la méthode des moments.

reposer sur une estimation préalable, et non être déterminée en fonction d'un fait stylisé à reproduire [21]. Dans la pluspart des études récentes, le modèle est étalonné à l'aide de données d'enquêtes (principalement pour les paramètres de la fonction d'utilité et de la fonction de production) et de données macroéconomiques (notamment pour l'estimation du processus suivi par les chocs).

2.3 Réponses aux chocs et moments "théoriques"

L'écriture sous forme Etat-Mesure du modèle permet un calcul simple des fonctions de réponses à un choc technologique.

En notant C_T le vecteur correspondant à un choc technologique à la date t,

$$C_T = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

la réponse des états à la date $t + j$ est donnée par :

$$S_{t+j} = M^j C_T$$

Les réponses des commandes à la date $t + j$ seront alors données par

$$Z_{t+j} = \Pi M^j C_T$$

C'est également en utilisant la forme Etat-Mesure que nous pouvons déterminer les moments "théoriques" des variables du modèle. En notant $\Sigma_{SS} = E(S_t S_t')$ la matrice de variance covariance du vecteur des états [22], la matrice d'autocovariance à l'ordre j des états sera donnée par :

$$E(S_t S_{t+j}') = M^j \Sigma_{SS}$$

De même, la matrice d'autocovariance à l'ordre j des commandes sera donnée par :

$$E(Z_t Z_{t+j}') = \Pi M^j \Sigma_{SS}$$

2.4 Détermination par simulation stochastique des moments filtrés

(King et al. 1988) comparent logiquement ces moments "théoriques" aux moments empiriques des composantes cycliques des séries observées, celles-ci étant

21. Dans les premiers modèles RBC, le processus du choc de productivité était spécifié pour reproduire la variance du produit.

22. On peut déterminer cette matrice à partir de l'équation (42), connaissant le processus suivi par le choc technologique A.

obtenues par élimination d'un trend exponentiel déterministe en γ^t pour rester cohérent avec le modèle théorique. Cependant, ces moments n'ont aucune signification économique particulière : l'objet des théoriciens du cycle [23] s'identifie à l'explication des mouvements de l'activité économique de périodicité inférieure à cinq ans. Il s'agit alors de filtrer les séries simulées afin d'en extraire la composante correspondant au cycle économique. Le filtre proposé par (Hodrick et Prescott 1980) permet d'éliminer des séries les mouvements de basse fréquence, y compris ceux inclus dans la composante stationnaire. Pour une variable x donnée, le filtre détermine la composante de croissance x^{HP} qui minimise la somme des carrés des écarts à la série prise en logarithme (sauf pour les variables de taux) x^B sous la contrainte que la somme des carrés des différences secondes soit inférieure à une certaine valeur μ, soit

$$\min_{\{x_y^{HP}\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^{T} \left(x_t^B - x_t^{HP}\right)^2$$

sous la contrainte

$$\sum_{t=2}^{T-1} \left(\left(x_{t+1}^{HP} - x_t^{HP}\right) - \left(x_t^{HP} - x_{t-1}^{HP}\right)\right)^2 \leq \mu$$

Plus μ est choisi faible et plus la composante de croissance sera lisse, un choix μ égal à zéro correspondant à la droite des moindres carrés. Comme le note (Prescott 1986), μ est choisi pour chaque série (en données trimestrielle) de manière à ce que le multiplicateur λ associé à la contrainte soit égal à 1600. Le programme effectivement résolu pour extraire la composante tendancielle d'une série x est alors :

$$\min_{\{x_t^{HP}\}_{t=1}^T} \sum_{t=1}^{T} \left[\left(x_t - x_t^{HP}\right)^2 + \lambda \sum_{t=2}^{T-1} \left(\left(x_{t+1}^{HP} - x_t^{HP}\right) - \left(x_t^{HP} - x_{t-1}^{HP}\right)\right)^2\right]$$

avec $\lambda = 1600$. La composante cyclique $\widehat{x}^{HP}$ est alors donnée par l'équation :

$$\widehat{x}^{HP} = x_t^B - x_t^{HP}$$

(King et Rebelo 1989) ont mis en évidence les propriétés spectrales du filtre de Hodrick-Prescott et ont montré que ce filtre éliminait les basses fréquences des séries. (Prescott 1986) montre que les fréquences supérieures à 32 trimestres sont éliminées pour $\lambda = 1600$. En outre, comme le notent (Hodrick et Prescott 1980) [24], si $\Delta^2 x_t^{HP}$ (la série des différences secondes de x_t^{HP}) et $\widehat{x}_t^{HP}$ sont distribuées indépendamment et suivant des lois normales d'espérance nulle, le programme de minimisation ci-dessus revient à calculer l'espérance conditionnelle de x_{HP} connaissant

23. Il ne s'agit pas ici de se référer au sens purement statistique de ce phénomène qui, alors, renvoit à la composante stationnaire des séries.

24. Nous reprenons ici (Danthine 1988)

x^B, lorsque λ est égal au rapport des variances de x_t^{HP} et $\widehat{x}_t^{HP}$. Si l'on accepte des variations cycliques jusqu'à 5% de la valeur de la série brute par trimestre et des changements dans le taux de croissance jusqu'à 1/8% par trimestre, on obtient :

$$\lambda = \frac{5^2}{(1/8)^2} = 1600$$

On peut alors simuler le modèle en partant de tirages des innovations affectant le système (choc technologique dans ce modèle simple) afin de déterminer des vecteurs de séries macroéconomiques brutes, séries qui seront filtrées par le filtre d'Hodrick-Prescott afin de calculer les caractéristiques empiriques du cycle ainsi obtenu.

Pour cela, on tire pour chaque simulation T ϵ_A selon une loi normale d'espérance nulle et de variance la variance estimée de ces chocs sur la période. Munis de ces séries de chocs, on génère une séries de T déviations relatives à la partie tendancielle $\widehat{x}$ pour chaque variable x du système. En partant de valeurs initiales K_0 et A_0 , on construit également pour chaque variable x la série tendancielle x^T. Cette variable x^T croît au taux γ_{XN} sauf pour les heures travaillées (taux nul). Les séries brutes x^B (tendance+cycle) sont alors obtenues à l'aide de l'équation :

$$x_t^B = x_t^T(1 + \widehat{x}_t)$$

pour $t = 1, T$. Ces séries brutes sont prises en logarithme et filtrées par Hodrick-Prescott pour obtenir une tendance x^{HP} et la partie cyclique $\widehat{x}^{HP}$.

Ces opérations sont répétées pour chaque variable du modèle et pour n tirages différents de la série de choc ϵ_A. Les caractéristiques du cycle filtré (variances, covariances, autocorrélations et corrélations croisées décalées) sont alors données comme moyennes empiriques sur l'ensemble des n simulations.

Conclusion

Le courant des cycles réels se distingue donc à la fois par son message économique et par ses techniques de résolution et de validation. Plus que son message théorique, c'est son apport méthodologique qui nous semble devoir assurer sa pérennité. (Hénin 1991) souligne que le début des années quatre-vingt dix est marqué par l'émergence de modèles établissant la nécessité de prendre en compte les chocs de demande parallèlement aux chocs technologiques, comme le montrent (Cho et Cooley 1990), (Burnside et al. 1990), (Fairise et Langot 1991) et (Hairault et Portier 1991). C'est parce que ces modèles utilisent la *méthodologie RBC* décrite dans cet article qu'il nous semblaient utile d'en préciser les fondements et les propriétés.

Annexe
Démonstration de la proposition 5

Cette démonstration reprend (Levhari et Liviatan 1972). et nécesssite une réécriture du problème d'optimisation dynamique où l'objectif est fonction de k_{t+1}, k_t et N_t. Pour cela, nous substituons la consommation dans la fonction d'utilité par son expression dans de la contrainte budgétaire. Le programme se réécrit alors :

$$\max_{k_{t+1},N_t} E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j u[(1-\delta)k_{t+j} + A_{t+j}F(k_{t+j}, N_{t+j}) - \gamma k_{t+j+1}, 1 - N_{t+j}] \right]$$

Pour simplifier l'écriture, posons que :

$$v(k_t, N_t, k_{t+1}) = u[(1-\delta)k_t + A_t F(k_t, N_t) - \gamma k_{t+1}, 1 - N_t]$$

Le problème d'optimisation devient alors :

$$\max_{k_{t+1},N_t} E_t \left[\sum_{j=0}^{\infty} \beta^j v(k_{t+j}, N_{t+j}, k_{t+j+1}) \right]$$

Les conditions d'optimalité s'obtiennent en dérivant l'expression ci-dessus par rapport à k_{t+1} et N_t.

$$D_3 v(k_t, N_t, k_{t+1}) + \beta E_t \left[D_1 v(k_{t+1}, N_{t+1}, k_{t+2}) \right] = 0$$

$$D_2 v(k_t, N_t, k_{t+1}) = 0$$

Ces conditions d'optimalité, obtenues à partir d'un calcul de variations, sont équivalentes à celles obtenues à partir de la fonction valeur.

Afin de trouver les propriétés du système dynamique (34), on linéarise ces conditions d'optimalité au voisinage de l'état stationnaire, soit :

$$D_{31}v(k,N,k)\Delta k_t + D_{32}v(k,N,k)\Delta N_t + D_{33}v(k,N,k)\Delta k_{t+1}$$

$$+\beta D_{11}v(k,N,k)\Delta k_{t+1} + \beta D_{12}v(k,N,k)E_t\left[\Delta N_{t+1}\right] + \beta D_{13}v(k,N,k)E_t\left[\Delta k_{t+2}\right] = 0 \quad (44)$$

$$D_{21}v(k,N,k)\Delta k_t + D_{22}v(k,N,k)\Delta N_t + D_{23}v(k,N,k)\Delta k_{t+1} = 0 \quad (45)$$

De l'équation (45), nous déduisons une expression de ΔN_t en fonction de Δk_{t+1} et Δk_t. En substituant dans l'équation (44), nous obtenons une équation d'évolution du capital d'ordre 2. Soit :

$$\beta^\star B E_t\left[\Delta k_{t+2}\right] + [A + \beta^\star C]\Delta k_{t+1} + B\Delta k_t = 0 \quad (46)$$

avec :

$$
\begin{aligned}
A &= D_{33}v(k,N,k) + (D_{32}v(k,N,k))^2(D_{22}v(k,N,k))^{-1} \\
B &= D_{13}v(k,N,k) + D_{12}v(k,N,k)(D_{22}v(k,N,k))^{-1}D_{23}v(k,N,k) \\
C &= D_{11}v(k,N,k) + (D_{12}v(k,N,k))^2(D_{22}v(k,N,k))^{-1}
\end{aligned}
$$

L'équation caractéristique de (46) a pour solution les valeurs propres de la matrice W. Cette équation caractéristique s'écrit :

$$\beta^\star B\mu^2 + [A + \beta^\star C]\mu + B = 0 \tag{47}$$

Le produit des racines de cette équation, $\mu_1\mu_2$, est égal à $\frac{B}{\beta^\star B} = \frac{1}{\beta^\star}$. □

Démonstration du corrolaire 1

Le produit des racines $\mu_1\mu_2$ étant égal à $1/\beta^\star > 1$, en majorant $|\mu_1|$ par 1, on obtient :

$$|\mu_2| > \frac{1}{\beta^\star} \tag{48}$$

Si μ_1 est une valeur propre complexe (de module inférieur à 1 par hypothèse), alors μ_1 et μ_2 sont conjuguées et de même module, ce qui contredit (48). Les valeurs propres sont donc réelles.

En reprenant l'équation caractéristique :

$$\phi(\mu) = \beta^\star B\mu^2 + [A + \beta^\star C]\mu + B$$

et sous l'hypothèse $|\mu_1| < 1$, nous avons :

$$\phi(0)\phi(1) = B[\beta B + (A + \beta C) + B] < 0$$

Sous les hypothèses (H_1) et (H_2), on montre que A et C sont négatifs. Si B est négatif, alors le produit $\phi(0)\phi(1)$ sera positif. B est donc nécessairement positif. La somme des racines est donnée par :

$$\mu_1 + \mu_2 = -\frac{A + \beta C}{B}$$

Les signes respectifs de A, B et C impliquent que $\mu_1 + \mu_2$ est positif. Les deux racines étant de même signe, elles sont donc positives. □

Références

Baxter, M., *Approximating Suboptimal Dynamic Equilibria : An Euler Equation Approach*, Working Paper, University of Rochester 1988.

Blanchard, O.J. et C. Kahn, The Solution of Linear Difference Models under Rational Expectations, *Econometrica*, July 1980, *48* (5), 1305–1311.

Burnside, C., M. Eichenbaum, et S. Rebelo, *Labor Hoarding and the Business Cycle*, Working Paper 3556, National Bureau of Economic Research December 1990.

Cho, J.O. et T. Cooley, *The Business Cycle with Nominal Contracts*, Mimeo, University of Rochester 1990.

Cooley, T. et G. Hansen, The Inflation Tax in a Real Business Cycle Model, *The American Economic Review*, September 1989, *79* (4), 733–748.

Danthine, J.P., *Modélisation des fluctuations conjoncturelles : une approche nouvelle*, Cahiers de Recherche Economique, Université de Lausanne 1988.

—— et J. Donaldson, *Methodological and Empirical Issues in Real Business Cycle Theory*, Cahiers de Recherche Economique 9102, Université de Lausanne 1991.

—— , —— , et R. Mehra, On some Computational Aspect of Equilibrium Business Cycle Theory, *Journal of Economic Dynamics and Control*, July 1989, *13* (3), 449–470.

d'Autume, A. et P. Michel, Epargne, investissement et monnaie dans une perspective intertemporelle, *Revue Economique*, 1985, *36*, 243–290.

Fairise, X. et F. Langot, *Productivité et cycle : coûts d'ajustement de l'emploi et thésaurisation de main d'oeuvre*, Mimeo, Université de Paris I 1991.

Hairault, J.O., *Le modèle RBC canonique de King, Plosser et Rebelo [1988] : mécanismes et évaluation comparée sur données françaises et américaine*, Document de travail 91.27, M.A.D.. Université de Paris I 1991.

—— et F. Portier, *Concurrence monopolistique et rigidités nominales dans l'étude du cycle économique*, Document de travail, M.A.D. Université de Paris I et Crest 1991.

Hansen, G., Indivisible Labor and the Business Cycles, *Journal of Monetary Economics*, November 1985, *16* (3), 309–327.

Hansen, L. et T. Sargent, Formulating and Estimating Dynamic Linear Rational Expectations Models, *Journal of Economics Dynamics and Control*, February 1980, *2*, 7–46.

Hodrick, R. et Edward C. Prescott, *Post-war U.S. Business Cycles : an Empirical Investigation*, Mimeo, Carnegie-Mellon University November 1980.

Hénin, P.Y., Sur la non-stationnarité des séries macroéconomiques : tendances, cycles et persistance, *Revue d'Economie Politique*, September-October 1989, *99* (5), 661–691.

___ , *Développements de la théorie des cycles réels*, Working Paper 9113, Cepremap, Paris 1991.

King, R., C. Plosser, et S. Rebelo, *Production Growth and Business Cycles : Technical Appendix*, Working Paper, University of Rochester 1987. Revised May 1990.

___ , ___ , et ___ , Production, Growth and Business Cycles I, *Journal of Monetary Economics*, March-May 1988, *21* (2/3), 196–232.

___ et S. Rebelo, *Low Frequency Filtering and the Real Business Cycles*, Working Paper 205, University of Rochester 1989.

Kydland, Finn et Edward C. Prescott, Time to Build and Aggregate Fluctuations, *Econometrica*, November 1982, *50* (6), 1345–1370.

Levhari, D. et N. Liviatan, On Stability in the Saddle-point Sense, *Journal of Economic Theory*, 1972, *4*, 88–93.

Long, J. et C. Plosser, Real Business Cycle, *Journal of Political Economy*, February 1983, *91* (1), 39–69.

MaCurdy, T., An Empirical Model of Labour Supply in a Life Cycle Setting, *Journal of Political Economy*, 1981, *89* (61), 1059–1085.

McCallum, B., Real Business Cycles Models, in Handbook of Modern Business Cycle Theory, Barro, R., 1988.

Michel, P., Some Clarifications on the Transversality Condition, *Econometrica*, 1990, *58*, 705–723.

Prescott, Edward C., Theory Ahead of Business-Cycle Measurement, *Carnegie-Rochester Conference Series of Public Policy*, 1986, *25*, 11–44.

Rebelo, S., *Tractable Heterogeneity and Near Steady State Dynamics*, Working Paper, Northwestern University, Portuguese Catholic University and Rochester Center for Economic Research 1988.

Rogerson, R., Indivisible Labor, Lotteries and Equilibrium, *Journal of Monetary Economics*, January 1988, *21* (1), 3–16.

Solow, R., Technical Change and the Aggregate Production Function, *Review of Economics and Statistics*, August 1957, *39* (3), 312–320.

Stokey, L. et R. Lucas, *Recursive Methods in Economic Dynamics*, Cambridge, Mass : Harvard University Press, 1989. En collaboration avec E. Prescott.

Weitzman, M., Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models, *Management Science*, 1973, *19*, 783–789.